

## Domácí úkol ze cvičení 8 (jako příprava na cvičení 9)

Pokud jste neřešili úkol 8, tak dořešte, prosím, příklad s limitou rekurentně definované posloupnosti v a). A také promyslete z b) (nekonečné řady) příklady 1., 2., 3. .

A další příklady k promyšlení:

Řady s nezápornými členy:

1. Užitím vhodného kritéria vyšetřete konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n^2+2} \right)^2; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+2}{3n+1} \right)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^n.$$

2. Vyšetřete konvergenci řady v závislosti na parametru  $a > 0$ :

a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a}$ ;    b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$ ;    c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ .

3. Pokuste se pomocí Cauchyho kondenzačního kritéria vyšetřit konvergenci řad

a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ ;    b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ .

A dále si zopakujte, prosím, kritéria neabsolutní konvergence řad (z přednášky) a pokuste se kritéria i použít v některém z dalších příkladů:

1. Vyšetřete absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$ ;    b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ;    c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ ;    d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ .

2. V závislosti na parametru  $x \in \mathbb{R}$  vyšetřete, zda konverguje absolutně, resp. konverguje neabsolutně, resp. diverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

A chcete-li, můžete navíc promyslet:

3. Ukažte, že alternující řada  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$  konverguje neabsolutně, i když posloupnost  $\left\{ \frac{1}{n + (-1)^n} \right\}$  není monotónní.

4. Ukažte, že alternující řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$$

diverguje, i když  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .